Priklad na nestabilni algoritmus

Zadani: Je dana obycejna diferencialni rovnice $y'(x) = -y(x)$ s pocateni podminkou $y(0) = 1$. Ukol je najit $y(x)$ v libovolnem bode x.

Analyticke reseni: $y(x) = \exp(-x)$

Numericke reseni: Pro aproximaci derivace funkce pouzijeme Tayloruv rozvoj:

$$f(x+h) = \sum_n \frac{h^n f^{(n)}(x)}{n!} = f(x) + hf'(x) + O(h^2) \tag{1}$$

1. pripad tzv. Eulerova metoda

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{O(h^2)}{h} \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

2. pripad (odectenim rozvoje $f(x+h)$ a $f(x-h)$) presnejsi vzorec pro aproximaci derivace

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{3}$$

1. pripad rovnici $-y(x) = y'(x)$ lze tedy resit numericky takto

$$-y(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \quad \rightarrow \quad y(x+h) = y(x)(1-h) \tag{4}$$

2. pripad nebo presneji takto

$$-y(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} \quad \rightarrow \quad y(x+h) = y(x-h) - 2hy(x) \tag{5}$$

Nestabilita
Predpokladejme malou chybu ε, ktera vznikne napriklad v prubehu vypoctu zaokrouhlenim. Oznacme jako y reseni, ktere by bylo vypoctene, kdyby k teto chybe nedoslo a y^* reseni, ktere v sobe tuto chybu jiz obsahuje.

V 1. pripade

$$\begin{aligned}
y(x+h) &= y(x)(1-h) \\
y^*(x+h) &= (y(x)+\varepsilon)(1-h) \\
&= y(x+h)+\varepsilon(1-h) \\
y(x+2h) &= y(x+h)(1-h) \\
y^*(x+2h) &= y^*(x+h)(1-h) \\
&= (y(x+h)+\varepsilon(1-h))(1-h) \\
&= y(x+2h)+\varepsilon(1-h)^2
\end{aligned}$$

Chyba ε se tedy postupne vytraci.

Ve 2. pripade

$$\begin{aligned}
y(x+h) &= y(x-h)-2hy(x) \\
y^*(x+h) &= (y(x-h)+\varepsilon)-2hy(x) \\
&= y(x+h)+\varepsilon \\
y(x+2h) &= y(x)-2hy(x+h) \\
y^*(x+2h) &= y(x)-2hy(x+h)^* \\
&= y(x)-2h(y(x+h)+\varepsilon) \\
&= y(x)-2hy(x+h)-2h\varepsilon \\
&= y(x+2h)-2h\varepsilon \\
y^*(x+3h) &= y(x+3h)+\varepsilon(1+4h^2) \\
y^*(x+4h) &= y(x+4h)-2h\varepsilon(2+4h^2) \\
y^*(x+5h) &= y(x+5h)+\varepsilon(1+12h^2+16h^4) \\
y^*(x+6h) &= y(x+6h)-2h\varepsilon(3+16h^2+16h^4) \\
y^*(x+7h) &= y(x+7h)+\varepsilon(1+24h^2+80h^4+64h^6)
\end{aligned}$$

Chyba ε se postupne zvetsuje! Dochazi k nestabilite. Reseni osciluje - v lichych krocich se chyba pricita a v sudych odcita.