

# Implicitní schéma pro rovnici vedení tepla

Vojtěch Horný

9. ledna 2012

## Abstrakt

Tento text je součástí zápočtové práce k předmětu Diferenciální rovnice na počítači přednášeném zimním semestru roku 2011 na FJFI ČVUT.

Obsahem textu je řešení rovnice vedení tepla, máme-li pro diferenční schéma k dispozici jeden bod na časové  $n$ -té vrstvě a pět bodů na časové vrstvě  $(n + 1)$ . Navržené schéma je řádu přesnosti  $O(\Delta t, \Delta x^4)$ , stabilní ve všech případech. Byla také sestavena modifikovaná rovnice a provedena implementace schématu.

## Úvodní poznámka

Tento text a veškeré zdrojové kódy jsou k dispozici také online na webové adrese <http://kfe.fjfi.cvut.cz/~horny/DRP/zapocet>.

## Zadání úlohy

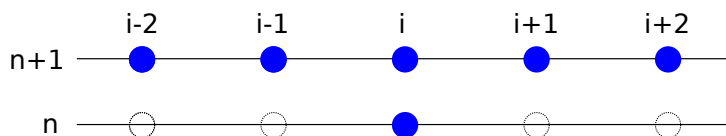
Zkoumejte rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

máte-li k dispozici body

- $\{i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2\}$  na  $n$ -té časové vrstvě
- $i$  na časové vrstvě  $n + 1$ .

Pro přehlednost je situace znázorněna na obrázku 1. Splňte následující úkoly:



Obrázek 1: Ilustrační obrázek k zadání

1. Navrhnete diferenční náhradu druhé prostorové derivace.
2. Určete řád přesnosti navrženého schématu.
3. Diskutujte, za jakých okolností je diferenční schéma stabilní.
4. Stanovte modifikovanou rovnici pro zadanou rovnici a zvolené schéma.
5. Navržené schéma implementujte.

## Návrh diferenčního schématu

Budeme hledat diferenční náhradu druhé prostorové derivace, máme-li k dispozici pět bodů symetricky rozložených kolem bodu, kde diferenci určujeme.

Obecně očekáváme diferenci ve tvaru

$$au_{i-2}^{n+1} + bu_{i-1}^{n+1} + cu_i^{n+1} + du_{i+1}^{n+1} + eu_{i+2}^{n+1}, \quad (2)$$

tedy jako lineární kombinaci hodnot funkce v jednotlivých bodech. Koeficienty  $a, b, c, d, e$  určíme pomocí Taylorova rozvoje funkce  $u$  kolem bodu  $i$  do čtvrtého řádu. Výraz (2) lze totiž přepsat jako kombinaci jednotlivých prostorových derivací funkce  $u$ . Koeficienty u nulté, první, třetí a čtvrté derivace položíme rovny nule, koeficient u druhé derivace naopak položíme roven jedné.

Získaná soustava pěti rovnic pro pět neznámých má jednoznačné řešení. Hledaná diferenční náhrada druhé prostorové derivace je

$$\frac{-u_{i-2}^{n+1} + 16u_{i-1}^{n+1} - 30u_i^{n+1} + 16u_{i+1}^{n+1} - u_{i+2}^{n+1}}{12\Delta x^2}. \quad (3)$$

Časová diference je triviálně

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, \quad (4)$$

tedy výsledné zkoumané schéma má tvar

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - a \frac{-u_{i-2}^{n+1} + 16u_{i-1}^{n+1} - 30u_i^{n+1} + 16u_{i+1}^{n+1} - u_{i+2}^{n+1}}{12\Delta x^2} = 0. \quad (5)$$

Celý postup v programu Maple naleznete v souboru `navrh.mw`.

## Řád přesnosti

K určení řádu přesnosti opět poslouží Taylorův rozvoj, nyní ovšem ve dvou rozměrech. Jednotlivé hodnoty  $u_j^m$  ve schématu (5) jsou nahrazeny pomocí Taylorova rozvoje funkce  $u(t, x)$  se středem v bodě ( $t = n, x = i$ ). Bylo potřeba zvolit rozvoj do sedmého řádu.

Nejnižší mocniny u  $\Delta x$ , resp.  $\Delta t$  udávají řád přesnosti v poloze, resp. v čase. Naše navržené schéma je řádu  $O(\Delta t, \Delta x^4)$ .

Zdrojový kód v programu Maple je k dispozici jako `rad.mw`.

## Stabilita

K vyšetření stability použijeme von Neumannovu analýzu schématu. Provedeme transformaci

$$u_{i+k}^{n+m} \rightarrow g^m e^{ik\xi}. \quad (6)$$

Po dosazení získáváme výraz

$$\frac{ag\Delta t \cos^2 \xi - 8ag\Delta t \cos \xi + 3\Delta x^2 g - 3\Delta x^2 + 7ag\Delta t}{3\Delta t \Delta x^2} = 0. \quad (7)$$

Tento výraz rozřešíme vůči zesilujícímu faktoru  $g$ . Získáváme

$$g = \frac{3\Delta x}{a\mu \cos^2 \xi - 8a\mu \cos \xi + 3\Delta x + 7a\mu}, \quad (8)$$

kde

$$\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (9)$$

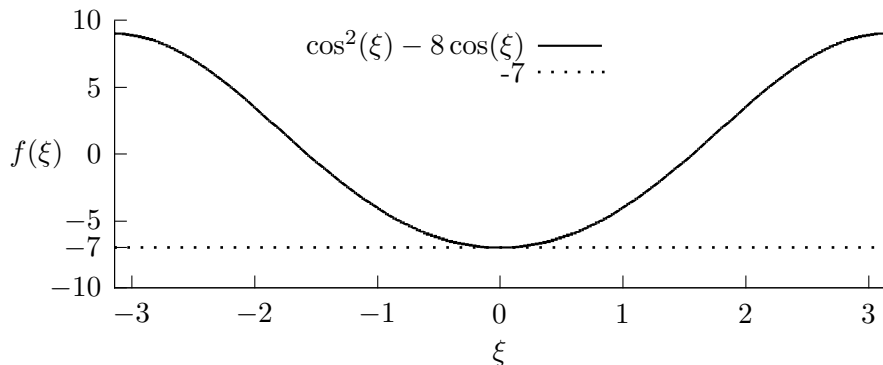
Aby bylo schéma stabilní, je třeba splnit podmínku  $(\forall \xi)(\|g\|^2 \leq 1)$ . Vychází požadavek

$$-\frac{a\mu (\cos \xi - 1) (\cos \xi - 7) (a\mu \cos^2 \xi - 8a\mu \cos \xi + 6\Delta x + 7a\mu)}{(a\mu \cos^2 \xi - 8a\mu \cos \xi + 3\Delta x + 7a\mu)^2} \leq 0 \quad (10)$$

To vede na podmínku

$$\cos^2 \xi - 8 \cos \xi \geq -6 \frac{\Delta x}{a\mu} - 7, \quad (11)$$

která je splněna vždy, je-li  $a \geq 0$ , jak lze vidět z grafu na obrázku 2.



Obrázek 2: Ilustrační obrázek k vysvětlení stability. Je-li  $a > 0$ , pak pro všechna  $\xi$  lze zaručit splnění podmínky (11).

Celý postup je možno sledovat v souboru `stabilita.mw`.

## Modifikovaná rovnice

Postup pro sestavování modifikované rovnice je analogický s vyšetřováním řádu přesnosti. Opět nejprve nahradíme jednotlivé členy našeho schématu pomocí dvourozměrného Taylorova rozvoje se středem v bodě  $(t = n, x = i)$ , tentokrát však až do osmého řádu.

Výsledný výraz nejprve zjednodušíme, vyjádříme z něj první časovou derivaci a poté postupně trpělivě nahrazujeme veškeré časové derivace řádu vyššího než dva derivacemi prostorovými a smíšenými. Pomůžeme si poznatkem (9) a dále všechny sčítance se členem  $\Delta x^5$  pokládáme rovný nule.

Po šestnácti úpravách konečně získáváme modifikovanou rovnici

$$u_t - au_{xx} = -\frac{1}{90} a \Delta x^4 u_{x^6} - \frac{1}{720} a^5 \mu^4 \Delta x^4 u_{x^{10}}. \quad (12)$$

Postup je možno sledovat v souboru `modif.mw`. Při výpočtu modifikované rovnice se nejvíce projevila výhoda využití integrovaných výpočetních systémů.

## Implementace schématu

Pro implementaci byl použit program Matlab. Předpokládám von Neumannovy okrajové podmínky, tzn. jsou-li  $x_1, x_J$  počáteční a koncový bod intervalu, na kterém rovnici řešíme, pak

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_1) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, x_J) = 0. \quad (13)$$

Toto je možno chápat následovně:

$$u_x(t, x_1) \approx \frac{u_1^{n+1} - u_2^{n+1}}{\Delta x} \approx \frac{u_1^{n+1} - u_3^{n+1}}{2\Delta x} \approx 0, \quad (14)$$

$$u_x(t, x_J) \approx \frac{u_J^{n+1} - u_{J-1}^{n+1}}{\Delta x} \approx \frac{u_J^{n+1} - u_{J-2}^{n+1}}{2\Delta x} \approx 0. \quad (15)$$

Z těchto okrajových podmínek získáváme rovnice

$$u_1^{n+1} - u_2^{n+1} = 0, \quad (16)$$

$$u_1^{n+1} - u_3^{n+1} = 0, \quad (17)$$

$$-u_{J-1}^{n+1} + u_J^{n+1} = 0, \quad (18)$$

$$-u_{J-2}^{n+1} + u_J^{n+1} = 0. \quad (19)$$

Z diferenčního schématu pak získáváme rovnice pro  $i = 3, \dots, J-2$

$$-\lambda a u_{i-2}^{n+1} + 16\lambda a u_{i-1}^{n+1} + (-30\lambda a - 1)u_i^{n+1} + 16\lambda a u_{i+1}^{n+1} - \lambda a u_{i+2}^{n+1} = -u_i^n, \quad (20)$$

kde jsme zavedli

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}. \quad (21)$$

Celkem lze rovnice (17–20) zapsat kompaktně maticovým zápisem

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{p}, \quad (22)$$

kde matice  $\mathbf{A}$  je ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda a & 16\lambda a & -1 - 30\lambda a & 16\lambda a & -\lambda a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda a & 16\lambda a & -1 - 30\lambda a & 16\lambda a & -\lambda a & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\lambda a & 16\lambda a & -1 - 30\lambda a & 16\lambda a & -\lambda a \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

a pro vektory  $\mathbf{u}^{n+1}$  a  $\mathbf{p}$  platí

$$\mathbf{u}^{n+1} = \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{J-1}^{n+1} \\ u_J^{n+1} \end{pmatrix}, \text{ resp. } \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_3^n \\ \vdots \\ -u_{J-2}^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Body na vrstvě  $(n+1)$  pak získáme jako

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}. \quad (25)$$

Je tedy třeba provést inverzi matice. Tato operace implementována nebyla, bylo využito příslušné funkce v Matlabu.

Úloha je řešena na intervalu  $(-B, B)$ . Jako počáteční podmínku jsem zvolil

$$u(0, x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases} \quad (26)$$

Implementace schématu je provedena v matlabovských souborech `VedeniTepla.m`, `resic.m`, `init.m` a `imstep.m`. Výpočet se spouští funkcí `VedeniTepla`.

## Závěrečná poznámka

Podářilo se implementovat navržené implicitní diferenční schéma k rovnici vedení tepla. Schéma je řádu přesnosti  $O(\Delta t, \Delta x^4)$ . Je-li  $a > 0$ , což je i požadavek dobré podmíněnosti rovnice vedení tepla, pak je schéma vždy stabilní.

Byla sestavena i modifikovaná rovnice. Jelikož je první nenulový koeficient u šesté prostorové derivace, je schéma difusní.